第1章

熱伝導シミュ

1.1 熱伝達・伝導にまつわる語句・用語のまとめ

熱輻射（輻は常用漢字になく、戦後、「放射」に置き換えられた[$wikipedia : http : //ja.wikipedia.org/wiki/\%E6\%94\%BE\%E5\%B0\%84$]）．: 熱が電磁波として運ばれる現象、または物体が熱を電磁波として放出する現象をさす.

1.2 有限要素法について

1.2.1 有限要素法の全体像

有限要素法の概要は、参考文献を参照されたし.

分類，境界要素法?有限要素法、色々

差分式導出の方法ガラーキン法、リッツ法、

特徴,

位置づけなど.

一般的な説明

1.3 熱伝導問題のシミュレーション

まず，熱伝導の支配方程式を導出する．式の導出には，矢川ら[1]，小林ら[2]を参考にした．支配方程式は，以下のエネルギー保存則に(経験則から生まれた)フーリエの法則を導入することで導出される([1]pp.2(ブロック線図), pp.8(図2.1)参照).

エネルギー保存則

静止している連続体の内の微小直方体の持つ単位質量当りのエネルギーEは,

$$E = e \tag{1.1}$$

ただし, eは内部エネルギーを表し, 比熱c, 温度Tを用いると,

$$e = cT \tag{1.2}$$

で表せる. 微小直方体要素中に含まれるエネルギーは密度をρとすると, $\rho E dxdydz = \rho c T dxdydz$である. 単位時間当たり変化率は, $\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} dxdydz$　となる. ただし, 微小直方体のx, y, z軸方向の微小幅をそれぞれdx, dy, dzとする. エネルギー保存則より,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} dxdydz \\
&= \Big(\text{単位時間に外部から要素内部に供給される熱量}\dot{Q}dxdydz\Big) \\
&- (\text{単位時間に熱伝導によって外部に流出する熱量}\dot{q})
\end{aligned} \tag{1.3}$$

ここで, $\dot{Q}$は単位時間に単位体積当たりに外部から供給される熱量で, 強制加熱, 輻射, 化学反応によるものなどがある. ただし, 内部で熱が発生しないものとする. 発生したり, 吸収して温度上昇以外のエネルギーとして変性が生じたりする場合には上式に加えて$\dot{q}$に加わる熱量を考慮する必要がある.

熱伝導による項

フーリエの法則：

単位時間に単位面積を移動する熱量は，その点における温度勾配に比例する

より，ある点における温度をT，熱伝導係数をλとすれば，その点におけるx,y,z方向に伝導する熱量の単位時間，単位面積当たりの値は，それぞれ$-\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}$, $-\lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}$, $-\lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}$と書ける．したがって，$dx, dy, dz$が十分に小さい時，$x_0$でx軸に垂直な面から流入する熱量は, $\left(-\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right)dydz$となる．微小距離$dx$離れた点$x_0+dx$では，位置$x_0$での温度勾配$\frac{\partial T}{\partial x}$を用いて，$T_{x+dx}=T+\frac{\partial T}{\partial x}dx$となるので，流出する熱量は，$-\lambda_{xx}\frac{\partial T_{x+dx}}{\partial x}dydz=\left(-\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right)dydz+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right)dxdydz$となる．よって，単位時間に単位直方体から流出する熱量は，$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right)dxdydz$

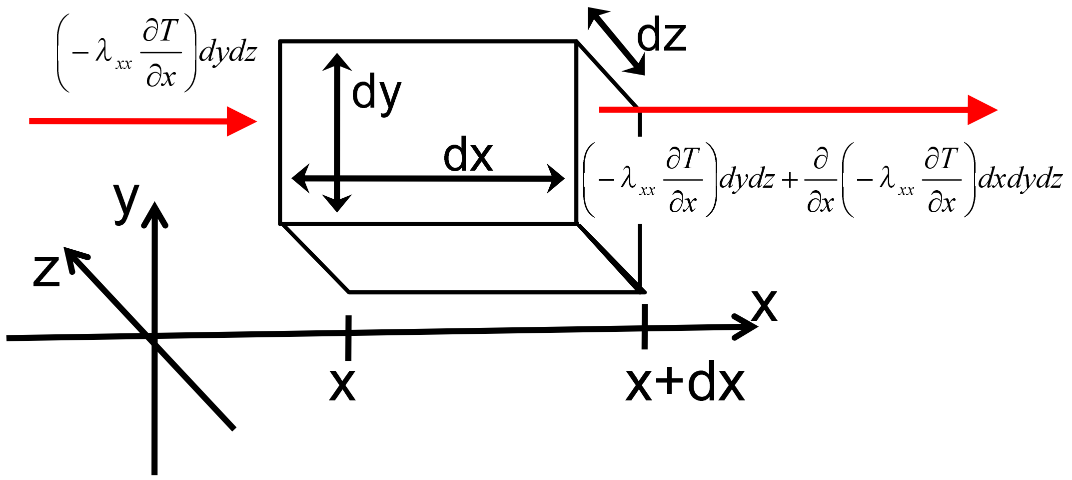

図1.1 微小直方体に出入りする熱量

となる．同様にして，y, z軸方向でも導出すると，式1.3の$\dot{q}$は，

$$\dot{q}=-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]dxdydz \tag{1.4}$$

となる．

以上より，式1.3に$\dot{q}$を代入して，両辺をdxdxdzで除すると，

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z} \tag{1.5}$$

ただし，比熱をcとする．

熱伝導の支配方程式の離散化

本節では，導かれた熱伝導の支配方程式を基に，固体内の3次元熱伝導式をガラーキン法で離散化する．式1.5を整理すると次式になる．

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{Q} \tag{1.6}$$

ただし，T$T[K]$: 温度, λ λ $[W/(m\cdot K)]$: 熱伝導率, Q : 内部発熱率 ($\dot{Q}$は単位時間に単位体積当たりに供給される熱量 $[WorJ]$・発熱率), ρ $\rho[kg/m^3]$: 密度, c$[W/(kg\cdot K\cdot s)]$: 比熱, t$[sec]$: 時刻　である．本研究では，熱伝導する物質は等方性がある ($\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = \lambda_{zz} = \lambda$) として計算を行う.

熱伝導問題の境界条件は，熱流速を$q[W/m^2]$, 境界上での外向き法線ベクトルをn とするとフーリエの法則より次の式で与えられる ([1] の pp.103 の (3) 式).

$$q = -[\lambda]\frac{\partial T}{\partial n} \tag{1.7}$$

以上より，熱伝導問題の支配方程式と有限要素の境界条件が与えられたので，支配方程式をガラーキン法によって離散化する．他に離散化する方法には，リッツ法もあるが，等価な式が出てくるため，省く.

1.3.1　ガラーキン法とは?(定義)

変分法の一種．変分法を拡張した重みつき残差法を基本とする近似解法

1.3.2　ガラーキン法に基づく有限要素法([1]pp.104〜を補完)

解析対象を有限な要素に分割し，要素内の温度分布を次のように表現する.

$$T(x,y,z,t) = [N(x,y,z)]\{T(t)\}_{ele} \tag{1.8}$$

//　(要素内部の任意点の温度を有限要素の節点温度Tを使ってあらわした式)//

ただし，有限要素内での任意位置 (x,y,z)・任意時間 (t) の温度をT, 要素内部温度とを結びつける重み関数 $[N]$($1\times n$の行マトリクス, n : 有限要素の接点

数) と，ある時刻 t における有限要素の節点温度ベクトル $\{T\}_{ele}$ で表す. $[N]$ を重み関数として，式1.6にガラーキン法を適用すると，以下の式になる.

$$\int_v [N]^T \{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{Q} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \} dv = 0 \tag{1.9}$$

ただし，上付き添え字 T は転置を，v は要素領域を表す. (ガラーキン法は $[N]^T$(転置) を付け加える．)

上式について，次のように 3 つの項に分けて考える.

$$\int_v [N]^T \{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) \} dv \tag{1.10}$$

$$\int_v [N]^T \frac{\partial Q}{\partial t} dv \tag{1.11}$$

$$\int_v [N]^T \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dv \tag{1.12}$$

ここで，式1.10は，2 階微分項を含むので，部分積分を用いて1階微分に弱形式化を行う.

$$\int_v N \nabla^2 A dv = \int_S N \nabla A \cdot n dS - \int_v \nabla N \cdot \nabla A dv \tag{1.13}$$

式1.13を用いて，式1.10を変形すると，次式のようになる.

$$\begin{aligned}
&\int_v [N]^T \{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) \} dv \\
&= \int_S [N]^T \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \lambda \frac{\partial T}{\partial z} n_z\right) dS \\
&- \int_v \{ \frac{\partial [N]^T}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial \{N\}^T}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) \} dv
\end{aligned} \tag{1.14}$$

式1.8を式1.14に適用すると，次式のようになる. ただし，節点温度は空間の関数ではないので，積分の外に出すことができる.

$$\begin{aligned}
&\int_v [N]^T \{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) \} dv \\
&= \int_S [N]^T \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \lambda \frac{\partial T}{\partial z} n_z\right) dS \\
&- \int_v \lambda \{ \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]\{T\}_{ele}}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]\{T\}_{ele}}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \frac{\partial [N]\{T\}_{ele}}{\partial z} \} dv \\
&= \int_S [N]^T [\lambda] \frac{\partial T}{\partial n} dS \\
&- \int_v \lambda \{ \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \frac{\partial [N]}{\partial z} \} dv \cdot \{T\}_{ele}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

//($[N]^T$(転置) はガラーキン法によるもの，$[N]$ は $T=NT$ によるもの)//

式1.15の右辺第一項に式1.7のフーリエの法則の式を適用すると

$$\int_S [N]^T[\lambda]\frac{\partial T}{\partial n}dS = -\int_S q[N]^T dS \tag{1.16}$$

が得られる．以上より，支配方程式にガラーキン法を適用(1.9)することで，次の離散化された式が得られる．

$$\begin{aligned}&-\int_v \lambda\left\{\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x}+\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}+\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\frac{\partial[N]}{\partial z}\right\}dv\cdot\{T\}_{ele}\\&-\int_S q[N]^T dS+\int_v [N]^T\frac{\partial Q}{\partial t}dv\\&-\int_v \rho c[N]^T[N]\frac{\partial\{T\}_{ele}}{\partial t}dv=0\end{aligned} \tag{1.17}$$

両辺に -1 をかけて

$$\begin{aligned}&\int_v \lambda\left\{\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x}+\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}+\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\frac{\partial[N]}{\partial z}\right\}dv\cdot\{T\}_{ele}\\&+\int_S q[N]^T dS-\int_v [N]^T\frac{\partial Q}{\partial t}dv\\&+\int_v \rho c[N]^T[N]\frac{\partial\{T\}_{ele}}{\partial t}dv=0\end{aligned} \tag{1.18}$$

上式を整理すると、次式になる。

$$[K]\{T_{ele}\}+[C]\left\{\frac{\partial T_{ele}}{\partial t}\right\}=\{F\} \tag{1.19}$$

$$[K] \;=\; \int_v \lambda\left\{\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x}+\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}+\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\frac{\partial[N]}{\partial z}\right\}dv\cdot\{T\}_{ele} \tag{1.20}$$

$$[C] \;=\; \int_v \rho c[N]^T[N]\frac{\partial\{T\}_{ele}}{\partial t}dv \tag{1.21}$$

$$\{F\} \;=\; \int_v [N]^T\frac{\partial Q}{\partial t}dv-\int_S q[N]^T dS \tag{1.22}$$

式1.22中の $\int_S q[N]^T dS$ について q を次に示す境界条件と置き換えることで導入する。

1.3.3 温度境界条件

次に，境界条件について考える．境界条件には，温度固定条件，熱流速条件，熱伝達条件，熱輻射条件の4つの境界条件がある．

温度境界条件：

温度固定境界条件は，有限要素法での固定境界条件に相当し，境界S_1上で固定温度T_fixとすると，

$$T = T_{fix} \qquad \text{（境界}S_1\text{上で）} \tag{1.23}$$

熱流速境界条件：

熱流速境界条件では，境界S_2上で熱流速$q_0[W/(m\ 2)]$が流出入するという境界条件であり，

$$q = q_0 \qquad \text{（境界}S_2\text{上で）} \tag{1.24}$$

したがって，式1.18での境界積分項は，次式のようになる．

$$\int_{S2} q[N]^T dS \quad = \int_{S2} q_0[N]^T dS \tag{1.25}$$

熱伝達境界条件：

熱伝達境界条件では，境界S_3上で固体表面と周囲を流れる流体などのとの間での熱伝達が生じる．熱伝達率を$\alpha[W/(m^2 \cdot K)]$，周囲の流体などの温度をT_cとすると，

$$q = \alpha(T - T_c) \qquad \text{（境界}S_3\text{上で）} \tag{1.26}$$

同様にして，式1.18での境界積分項は，次式のようになる．(ただし，要素全体の値ではなく，要素の節点の値を求めておきたいので$[N]^T$を乗じる順番

を入れ替える．)

$$\begin{aligned}\int_{S3} q[N]^T dS &= \int_{S3} \alpha[N]^T(T-T_c)dS \\ &= \int_{S3} \alpha[N]^T([N]\cdot T_{ele})dS - \int_{S3} \alpha T_c[N]^T dS \\ &= \int_{S3} \alpha[N]^T[N]dS \cdot T_{ele} - \int_{S3} \alpha T_c[N]^T dS \end{aligned} \tag{1.27}$$

熱輻射境界条件：

熱輻射境界条件では，境界S_4上で周囲環境に対して熱輻射が行われる．熱輻射率を$h[W/(m^2\cdot K]$，周囲環境温度をT_{OUT}とすると，次式のようになる．

$$q = h(T - T_{OUT}) \qquad \text{（境界}S_4\text{上で）} \tag{1.28}$$

同様にして，式1.18での境界積分項は，次式のようになる．

$$\begin{aligned}\int_{S4} q[N]^T dS &= \int_{S3} h(T-T_{OUT})[N]^T dS \\ &= \int_{S4} h([N]\cdot T_{ele})[N]^T dS - \int_{S4} hT_{OUT}[N]^T dS \\ &= \int_{S4} h[N][N]^T dS \cdot T_{ele} - \int_{S4} hT_{OUT}[N]^T dS \end{aligned} \tag{1.29}$$

離散化された式

以上より，熱伝導方程式の離散化式1.18に境界条件を加味した式は，次のようになる．

$$[K]\{T\}+[C]\{\frac{\partial T}{\partial t}\}=\{F\} \tag{1.30}$$

ただし，

$$\begin{aligned}[K] &= \int_v \lambda\{\frac{\partial [N]^T}{\partial x}\frac{\partial [N]}{\partial x}+\frac{\partial [N]^T}{\partial y}\frac{\partial [N]}{\partial y}+\frac{\partial [N]^T}{\partial z}\frac{\partial [N]}{\partial z}\}dv \\ &\quad +\int_{S3}\alpha [N]^T[N]dS+\int_{S4}h[N]^T[N]dS \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$[C]=\int_v \rho c[N]^T[N]dv \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}\{F\} &= \int_v [N]^T\frac{\partial Q}{\partial t}dv-\int_{S2}q_0[N]^TdS+\int_{S3}\alpha T_c[N]^TdS \\ &\quad +\int_{S4}hT_{OUT}[N]^TdS \end{aligned} \tag{1.33}$$

である．ただし，$[K]$は熱伝導マトリクス，$[C]$は熱容量マトリクス，$\{F\}$は熱流速ベクトルである．

熱流速ベクトルの第二項の符号は負である。これは、熱が流出すると仮定した場合である。熱の流入がある場合には、正になる。

また、以上のように空間的に離散化された式を時間について離散化を行い、式に含まれる積分値を求める。積分計算には、行列が含まれる。積分では、行列の成分ごとに積分計算を行う([3])

時間に関しての離散化

ガラーキン法では，空間に関して離散化を行った．次に，時間に関して離散化を行う．時間に関する離散化手法として，台形公式を用いたクランク・ニコルソンの差分式(参考文献[1](pp.117より))などが知られている．$0 <= \epsilon <= 1.0$となる、係数を用いて、時刻$t+\epsilon\Delta t$(Δは微小時間増分)における節点温度ベクトルを次のように表す。

$$\left\{T\left(t+\epsilon\Delta t\right)\right\}=\epsilon\{T(t+\Delta t)\}+(1-\epsilon)\{T(t)\} \tag{1.34}$$

また，時刻$t+\epsilon\Delta t$における節点温度ベクトルの時間微分を

$$\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\left(t+\epsilon\Delta t\right)\right\}=\frac{\{T(t+\Delta t)\}-\{T(t)\}}{\Delta t} \tag{1.35}$$

と表す．ただし，$\{T(t)\}$はある時間tにおける全体の節点温度ベクトルを表す．

式1.30に式1.34,1.35を代入すると，

$$[K]\{T(t+\epsilon\Delta t)\}+[C]\left\{\frac{\partial T}{\partial t}(t+\epsilon\Delta t)\right\} \quad = \quad \{F\}$$

$$[K]\{\{\epsilon T(t+\Delta t)\}+(1-\epsilon)\{T(t)\}\}+[C]\frac{1}{\Delta t}\{\{T(t+\Delta t)\}-\{T(t)\}\}=\{F\}$$

$$\left[\epsilon[K]+\tfrac{1}{\Delta t}[C]\right]T(t+\Delta t)=\left[-(1-\epsilon)[K]+\tfrac{1}{\Delta t}[C]\right]\{T(t)\}+\{F\} \tag{1.36}$$

以上より、ϵを用いた一般式の導出ができた。以下では、の値によって変化する積分値について場合別に考える．

i)$\epsilon=0$のとき（前進積分・陽解法）

時間tの時の値を用いて、前進差分を用いた陽解法の計算になる。そのため、式は、次式のようになる。

$$\frac{1}{\Delta t}[C]\{T(t+\Delta t)\}=\left[-[K]+\tfrac{1}{\Delta t}[C]\right]\{T(t)\}+\{F\} \tag{1.37}$$

ii）$\epsilon=\frac{1}{2}$のとき

$$\left[\tfrac{1}{2}[K]+\tfrac{1}{\Delta t}[C]\right]\{T(t+\Delta t)\} \quad = \quad \left[-\tfrac{1}{2}[K]+\tfrac{1}{\Delta t}[C]\right]\{T(t)\}+\{F\} \tag{1.38}$$

これはクランク・ニコルソンの差分式と呼ばれる．Δtの大きさがある程度(1sec〜)大きくなると解が振動するとの報告がある．

$(http://computation.cside.com/TA/time_integration_04.html$　参照)

そのため，シミュレーション実行時の時間にの設定には注意が必要である．

iii）$\epsilon = 1$ のとき（後退積分、完全陰解法）

時間t+1の時の値を用いて、後退差分を用いた陰解法の計算になる。そのため、式は、次式のようになる。

$$\left[[K] + \tfrac{1}{\Delta t}[C] \right] T(t+\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}[C]\{T(t)\} + \{F\} \tag{1.39}$$

//以下、消去予定(現行のガウスザイデル計算コードは、↑で計算されているよね?)

(上式の $T(t)$ を $T(t+\Delta t)$) に修正するだけで良いのか?)

$$\left[\tfrac{1}{2}[K] + \tfrac{1}{\Delta t}[C] \right] \{T(t+\Delta t)\} \;\; = \;\; \left[-\tfrac{1}{2}[K] + \tfrac{1}{\Delta t}[C] \right] \{T(t+\Delta t)\} + \{F\} \tag{1.40}$$

となる。

要素形状に合わせて導出式を離散化

2次元問題の場合

(1次)三角形要素の場合物理量uを,

$$u = ax + by + c \tag{1.41}$$

とすると,(続く)

3次元問題の場合

(1次)四面体要素3次元のモデルを四面体の有限要素のメッシュで区切る場合を考える．下図のように，1 ⇒ 2 ⇒ 3 ⇒ 1 と右ねじをしめるように四面体要素の節点番号を決めると，頂点 4 が決まる．要素の各節点この要素内の任意点(x,y,z)における温度を T とすると，係数 a, b, c, d を決めることで T は次式のように表わすことができる．

$$T(x, y, z) = ax + by + cz + d \tag{1.42}$$

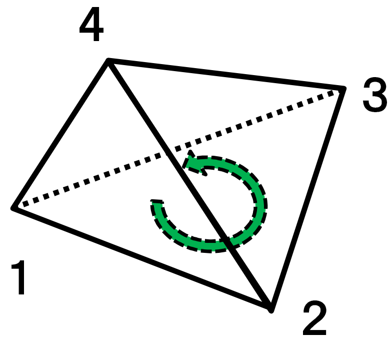

図1.2 四面体形状の有限要素

係数a,b,c,dは，各節点での温度T_1,T_2,T_3,T_4と各頂点の3次元座標($i=1$〜4のときにx_i,y_i,z_iが表す位置座標)を次の式のように代入した次の方程式を解いて求める．

$$
\begin{aligned}
T_1 &= ax_1 + by_1 + cz_1 + d \\
T_2 &= ax_2 + by_2 + cz_2 + d \\
T_3 &= ax_3 + by_3 + cz_3 + d \\
T_4 &= ax_4 + by_4 + cz_4 + d
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$

これを解いて求めたa,b,c,dをまとめると，要素内の任意点の温度Tは，形状関数Nを用いて次式のように近似することができる．

$$T = N_1T_1 + N_2T_2 + N_3T_3 + N_4T_4 \tag{1.44}$$

ただし，N_1,N_2,N_3,N_4は次式に示す形状関数であり，

$$N_i = \frac{1}{6V}(a_ix + b_iy + c_iz + d_i) \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{1.45}$$

となる．また，Vは四面体の体積を表し，図1.3の局所節点1,2,3を頂点とした三角形の面積と同三角形から局所節点4までの高さLとの積の3分の1と等しい．また，原点Oから節点1,2,3,4へのベクトルを用いると式1.46のようにかける．

$$V = \frac{1}{6} det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \tag{1.46}$$

また，$a_i, b_i, c_i, d_i,$ は，次に示す行列式の計算値である．

$$\begin{aligned}
a_i &= (-1)^i (y_k z_l + y_l z_j + y_j z_k - y_k z_j - y_l z_k - y_j z_l) \\
&= (-1)^i det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix} && (1.47) \\
b_i &= (-1)^i (x_j z_l + x_k z_j + x_l z_k - x_l z_j - x_j z_k - x_k z_l) \\
&= (-1)^i det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix} && (1.48) \\
c_i &= (-1)^i (x_j y_k + x_k y_l + x_l y_j - x_l y_k - x_j y_l - x_k y_j) \\
&= (-1)^i det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix} && (1.49) \\
d_i &= (-1)^i (x_j y_k z_l + x_k y_l z_j + x_l y_j z_k - x_l y_k z_j - x_j y_l z_k - x_k y_j z_l) \\
&= (-1)^i det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} && (1.50) \\
& && (1.51)
\end{aligned}$$

ただし，

$i = 1$ に対して，$j = 2, k = 3, l = 4$

$i = 2$ に対して，$j = 3, k = 4, l = 1$

$i = 3$ に対して，$j = 4, k = 1, l = 2$

$i = 4$ に対して，$j = 1, k = 2, l = 3$

の対応関係となっている．また，上に示した形状関数は，次の性質も示す.

$$\square \quad x, y, z \text{の多項式である.} \tag{1.52}$$

$$\square \quad N_i(x_j, y_j, z_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j \text{のとき}) \\ 1 & (i = j \text{のとき}) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4)) \tag{1.53}$$

$$\square \quad N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \tag{1.54}$$

四面体要素内の任意点(x, y, z)での形状関数N_1の値は，節点$2, 3, 4$で囲まれる面と節点1の間における物理量を近似するものであり，節点$2, 3, 4$と点(x, y, x)を頂点とする四面体の体積と節点$1, 2, 3, 4$で囲まれた四面体要素全体の体積の比に等しい．同様に，形状関数N_2は，節点$1, 3, 4$と要素内の任意点x, y, zを

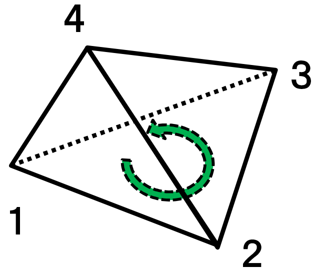

図1.3 四面体形状の有限要素

頂点とする四面体の体積と有限要素全体の体積との比に等しい.

また，たとえば，節点$2, 3, 4$で囲まれる三角形平面上では，$N_1 = 0$なので(□の性質より)，物理量は，u_2, u_3, u_4に依存するが，u_1と無関係となる.

節点$2, 3, 4$で囲まれた三角形の面上の点任意点$P(x, y, z, T)$の温度Tは，u_1の影響は受けず，物理量u_2, u_3, u_4にのみに依存する.

次に，熱伝導方程式の差分の式には，温度Tのx, y, z方向の偏微分が含まれるため，これを求めることにする．先に，求めた式

$$T = N_1T_1 + N_2T_2 + N_3T_3 + N_4T_4$$

より，各節点での温度T_i(i=1,2,3,4)は，節点で固定の定数であるので，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial N_1}{\partial x}T_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}T_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x}T_3 + \frac{\partial N_4}{\partial x}T_4 \\
&= \frac{a_1T_1 + a_2T_2 + a_3T_3 + a_4T_4}{6V} \qquad (1.55) \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3 + b_4T_4}{6V} \qquad (1.56) \\
\frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3 + c_4T_4}{6V} \qquad (1.57)
\end{aligned}$$

ここで，a_i〜$c_i, T_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), V$は定数なので，$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$は定数となる．

以上より，$\frac{\partial [N]}{\partial x}, \frac{\partial [N]^T}{\partial x}$を計算することができる．これらを有限要素ごとに求めて，積分し，全体剛性行列を作る．

形状関数から要素剛性行列の導出($[K_1], [K_2], ., [C], \{F_1\}, ..$**など**) **(導出式その１)**

$$N_i = \frac{1}{6}(a_ix + b_iy + c_iz + d_i) \qquad (1.58)$$

より、

$$\frac{\partial [N]}{\partial x} = \frac{1}{6}\ [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4] \qquad (1.59)$$

$$\frac{\partial [N]^T}{\partial x} = \frac{1}{6}\ [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T \qquad (1.60)$$

$$\frac{\partial [N]}{\partial y} = \frac{1}{6}\ [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4] \qquad (1.61)$$

$$\frac{\partial [N]^T}{\partial y} = \frac{1}{6}\ [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4]^T \qquad (1.62)$$

$$\frac{\partial [N]}{\partial z} = \frac{1}{6}\ [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \qquad (1.63)$$

$$\frac{\partial [N]^T}{\partial x} = \frac{1}{6}\ [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]^T \qquad (1.64)$$

上は、直前に説明があるので不要では?

$$\frac{\partial[N]}{\partial x}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}+\frac{\partial[N]}{\partial y}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}+\frac{\partial[N]}{\partial z}\frac{\partial[N]^T}{\partial z}= \tag{1.65}$$

$$= \frac{1}{36V^2}\begin{bmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 & a_1a_4+b_1b_4+c_1c_4 \\ a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1 & a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a_2a_4+b_2b_4+c_2c_4 \\ \cdot & \cdot & a_3^2+b_3^2+c_3^2 & a_3a_4+b_3b_4+c_3c_4 \\ (\text{対称}) & \cdot & \cdot & a_4^2+b_4^2+c_4^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{36V^2}[K_b]\,(\text{とおく}) \tag{1.66}$$

↓これで正しいのか?ソース・出典はどこ!?(2次元の出典はある。3次元への拡張を行った。)

$$\int\!\!\int\!\!\int \xi_1^i\xi_2^j\xi_3^k\xi_4^l d(volume) = 6V\frac{i!j!k!l!}{(i+j+k+l+3)!} \tag{1.67}$$

以上より、

(式1.31の右辺第一項を再掲):

$$K_1 = \int_v \lambda\left\{\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x}+\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}+\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\frac{\partial[N]}{\partial z}\right\}dv \tag{1.68}$$

$$= \int_v \lambda\frac{1}{36V^2}[K_b]\,dv \tag{1.69}$$

$$= \lambda\frac{1}{36V^2}[K_b]\int_v dv \tag{1.70}$$

式1.67で $i=j=k=l=0$ のとき、

$$(\text{式}\,1.67) = 6V\frac{0!}{3!} \tag{1.71}$$

$$= V \tag{1.72}$$

だから、これを、上式に代入して、

$$K_1 = \lambda\frac{1}{36V^2}[K_b]\,V \tag{1.73}$$

$$= \lambda\frac{1}{36V}[K_b] \tag{1.74}$$

K_2の導出

$$\int\int \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k d(squae) = 2\triangle(= \text{三角形の面積}) \cdot \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} \tag{1.75}$$

$$K_2 = \int_{S_3} \alpha [N]^T [N] dS \tag{1.76}$$

$$\begin{aligned}
[N]^T \cdot [N] &= \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1N_2 & N_1N_3 & N_1N_4 \\ N_2N_1 & N_2^2 & N_2N_3 & N_2N_4 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3^2 & N_3N_4 \\ N_4N_1 & N_4N_2 & N_4N_3 & N_4^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.77}$$

$$N_1 = 0 \text{の時} k_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^2 & N_2N_3 & N_2N_4 \\ 0 & N_3N_2 & N_3^2 & N_3N_4 \\ 0 & N_4N_2 & N_4N_3 & N_4^2 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = 0 \text{の時} k_{22} = \begin{bmatrix} N_1^2 & 0 & N_1N_3 & N_1N_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_3N_1 & 0 & N_3^2 & N_3N_4 \\ N_4N_1 & 0 & N_4N_3 & N_4^2 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = 0 \text{の時} k_{23} = \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1N_2 & 0 & N_1N_4 \\ N_2N_1 & N_2^2 & 0 & N_2N_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_4N_1 & N_4N_2 & 0 & N_4^2 \end{bmatrix}$$

$$N_4 = 0 \text{ の時 } k_{24} = \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1N_2 & N_1N_3 & 0 \\ N_2N_1 & N_2^2 & N_2N_3 & 0 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K2 = \int_{\Delta 1 \text{ の面積}} k_{21}dS + \int_{\Delta 2 \text{ の面積}} k_{22}dS + \int_{\Delta 3 \text{ の面積}} k_{23}dS + \int_{\Delta 4 \text{ の面積}} k_{24}dS$$

$$\int_{\Delta 1 \text{ の面積}} k_{21}dS \text{ の要素}$$

$$\int_{\Delta 234} {N_2}^2 dxdy = 2\Delta \frac{2!}{2+2}! \tag{1.78}$$

$$= \frac{\Delta}{6} \tag{1.79}$$

$$.. \tag{1.80}$$

以上より、

$$k_{21} = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$k_{22} = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$k_{23} = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$k_{24} = \frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

同様にして,$[C]$ は

$$C1 = \frac{\text{四面体の体積}(Volume)}{20}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

同様にして,$\{F\}$ は $N_1 = 0$ すなわち、節点 $2,3,4$、$1,3,4$、$1,2,4$、$1,2,3$ の面での積分を考える。すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} f2 &= \int_{S2} q_0 [N]^T dS \\ &= \int_{S2} q_0 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} dS \qquad (1.81) \\ &= q_{01}\frac{\Delta_1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + q_{02}\frac{\Delta_2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + q_{03}\frac{\Delta_3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + q_{04}\frac{\Delta_4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.82) \end{aligned}$$

ただし、$q_{01} \sim q_{04}$ は各面において流出入する熱量である。

要素内の節点間の計算式に変換する

離散化した式1.31,1.32,1.33を要素内の節点間の関係に直し，計算可能な式に変形する.

1.3.4 (x,y,z) 座標系から (ξ,η,ζ) 座標系への座標変換（座標変換を用いた要素剛性行列の作成・導出式その２）

形状関数の座標変換

そこでまず，考えやすくするために，式1.31の右辺第1,2,3項を K_1, K_2, K_3 とおき，(ξ,η,ζ) 座標系に変換する過程について考える．

(式1.31の右辺第一項を再掲):

$$K_1 = \int_v \lambda \left\{ \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y} + \frac{\partial[N]^T}{\partial z}\frac{\partial[N]}{\partial z} \right\} dv \tag{1.83}$$

以下，式1.83を (ξ,η,ζ) 座標に変換して計算する過程を示す．四面体要素内の任意点 (x,y,z) は形状関数 N_1, N_2, N_3, N_4 を用いて次式のように表せる．式1.84の証明は，後に示す．

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \\ z &= N_1z_1 + N_2z_2 + N_3z_3 + N_4z_4 \end{aligned} \tag{1.84}$$

これを，図1.4のような座標系に変換する．デカルト座標系 (x,y,z) で表され

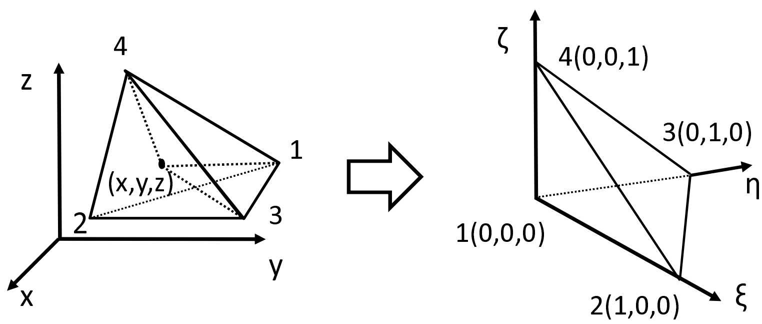

図1.4 (x,y,z) 座標系から，(ξ,η,ζ) 座標系への変換

た四面体内の任意点を，四面体内の座標系 (ξ,η,ζ) で表して，導き出される等式より座標変換を行う．

式1.84を四面体内の座標系で表すと，次式1.85の様になる．

$$\begin{aligned} x &= (1-\xi-\eta-\zeta)x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 + \zeta x_4 \\ y &= (1-\xi-\eta-\zeta)y_1 + \xi y_2 + \eta y_3 + \zeta y_4 \\ z &= (1-\xi-\eta-\zeta)z_1 + \xi z_2 + \eta z_3 + \zeta z_4 \end{aligned} \tag{1.85}$$

これらの式は以下より導出する．

$$x = N\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, y = N\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, z = N\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta-\zeta & \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \tag{1.86}$$

とすると，

$$\begin{aligned} x &= N\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta-\zeta & \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= (1-\xi-\eta-\zeta)x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 + \zeta x_4 \end{aligned}$$

同様にして，

$$y = (1-\xi-\eta-\zeta)y_1 + \xi y_2 + \eta y_3 + \zeta y_4 \tag{1.87}$$

$$z = (1-\xi-\eta-\zeta)z_1 + \xi z_2 + \eta z_3 + \zeta z_4$$

それぞれを変形して，

$$\begin{aligned} x &= (x_2-x_1)\xi + (x_3-x_1)\eta + (x_4-x_1)\zeta + x_1 \\ y &= (y_2-y_1)\xi + (y_3-y_1)\eta + (y_4-y_1)\zeta + y_1 \\ z &= (z_2-z_1)\xi + (z_3-z_1)\eta + (z_4-z_1)\zeta + z_1 \end{aligned} \tag{1.88}$$

となる．

計算に用いる領域は，$0 \leqq \xi \leqq 1,\quad 0 \leqq \eta \leqq 1,\quad 0 \leqq \zeta \leqq 1,\quad 0 \leqq \xi+\eta+\zeta \leqq 1$となるような四面体内部について考え，形状関数$N(1\times 4$の行マトリクス$)$は次式のように置き換えたものを用いる．

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \tag{1.89}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\frac{V_2}{V}-\frac{V_3}{V}-\frac{V_4}{V} & \frac{V_2}{V} & \frac{V_3}{V} & \frac{V_4}{V} \end{bmatrix} \tag{1.90}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta-\zeta & \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \tag{1.91}$$

ただし，Vは四面体要素の体積，V_2, V_3, V_4はそれぞれ，節点$1,3,4$と要素内部の任意点(x,y,z)を頂点とする四面体の体積，節点$1,2,4$と要素内部の任意点(x,y,z)を頂点とする四面体の体積，節点$1,2,3$と要素内部の任意点(x,y,z)を頂点とする四面体の体積を表す．また，1.54より，形状関数N_1を表現する．

$\frac{\partial N}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial z}$ を(ξ,η,ζ)座標系へ変換

次に，合成関数の偏微分法より，

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{1.92}$$

$$= \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{1.93}$$

ただし[J]はヤコビ行列である．両辺に$[J]^{-1}$を乗じることにより次式を得る．

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{1.94}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{det|J|}\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \zeta}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \zeta}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial x}{\partial \zeta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \zeta}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \zeta}-\frac{\partial y}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \zeta}-\frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

式1.88を代入して

$$[J]^{-1} = \frac{1}{det|J|}\begin{bmatrix} (y_3-y_1)(z_4-z_1)-(z_3-z_1)(y_4-y_1) & (z_2-z_1)(y_4-y_1)-(y_2-y_1)(z_4-z_1) & (y_2-y_1)(z_3-z_1)-(z_2-z_1)(y_3-y_1) \\ (z_3-z_1)(x_4-x_1)-(x_3-x_1)(z_4-z_1) & (x_2-x_1)(z_4-z_1)-(z_2-z_1)(x_4-x_1) & (z_2-z_1)(x_3-x_1)-(x_2-x_1)(z_3-z_1) \\ (x_3-x_1)(y_4-y_1)-(y_3-y_1)(x_4-x_1) & (y_2-y_1)(x_4-x_1)-(x_2-x_1)(y_4-y_1) & (x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1) \end{bmatrix} \tag{1.95}$$

となる．これを，

$$\begin{aligned} [J]^{-1} &= \frac{1}{det|J|}[A] \\ &= \frac{1}{det|J|}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.96}$$

とおく．これより，$[A]$の各要素は四面体の節点の座標値($\in$実数)で構成された実数値行列であることが分かる．

また，次式1.97より，

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{1.97}$$

$$\begin{aligned} det|J| &= (x_2-x_1)(y_3-y_1)(z_4-z_1)+(y_2-y_1)(z_3-z_1)(x_4-x_1)+(z_2-z_1)(x_3-x_1)(y_4-y_1) \\ &\quad -(x_4-x_1)(y_3-y_1)(z_2-z_1)-(x_2-x_1)(y_4-y_1)(z_3-z_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)(z_4-z_1) \\ &= (x_2-x_1)\{(y_3-y_1)(z_4-z_1)-(y_4-y_1)(z_3-z_1)\} \\ &\quad +(y_2-y_1)\{(z_3-z_1)(x_4-x_1)-(x_3-x_1)(z_4-z_1)\} \\ &\quad +(z_2-z_1)\{(x_3-x_1)(y_4-y_1)-(y_3-y_1)(x_4-x_1)\} \end{aligned} \tag{1.98}$$

と書き下せる．

式1.93を変形し，式1.100を代入すると

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{1.99}$$

$$= \frac{1}{det|J|} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{1.100}$$

$$= \frac{1}{det|J|} \begin{bmatrix} a_{11}\frac{\partial N}{\partial \xi} + a_{12}\frac{\partial N}{\partial \eta} + a_{13}\frac{\partial N}{\partial \zeta} \\ a_{21}\frac{\partial N}{\partial \xi} + a_{22}\frac{\partial N}{\partial \eta} + a_{23}\frac{\partial N}{\partial \zeta} \\ a_{31}\frac{\partial N}{\partial \xi} + a_{32}\frac{\partial N}{\partial \eta} + a_{33}\frac{\partial N}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{det|J|} \begin{bmatrix} a_{11}\ [-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0] + a_{12}\ [-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0] + a_{13}\ [-1\ \ 0\ \ 0\ \ 1] \\ a_{21}\ [-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0] + a_{22}\ [-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0] + a_{23}\ [-1\ \ 0\ \ 0\ \ 1] \\ a_{31}\ [-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0] + a_{32}\ [-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0] + a_{33}\ [-1\ \ 0\ \ 0\ \ 1] \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{det|J|} \begin{bmatrix} -a_{11} - a_{12} - a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} - a_{22} - a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{31} - a_{32} - a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.101}$$

$$= \frac{1}{det|J|} \begin{bmatrix} [N_x] \\ [N_y] \\ [N_z] \end{bmatrix} \tag{1.102}$$

とおく。

また，四面体の体積Vは，

$$
\begin{aligned}
6V &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ 0 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} (\because 2,3,4\text{行から}1\text{行を引く}) \qquad (1.103)
\end{aligned}
$$

$$
\left(= 1 \times \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \right)
$$

$$
= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} (\because \text{余因子展開で他の項は}0\text{倍}) \qquad (1.104)
$$

式1.88を式1.92に代入して,

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} \qquad (1.105)
\end{aligned}
$$

式1.105は式1.106と等しいので，

$$det|J| = 6V \tag{1.106}$$

となる．

　また，ヤコビアンの定義[4]より，

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{1.107}$$

これを変形して，

$$dxdydz = det[J]d\xi d\eta d\zeta \tag{1.108}$$

これらを用いて dV を座標変換する．

$$\begin{aligned} dV &= dxdydz \\ &= det|J|d\xi d\eta d\zeta \\ &= 6V d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \tag{1.109}$$

以上より，式1.83に，式1.102，式1.106を代入．また、式1.109を用いて，体積要素 dV の (x,y,z) 座標から (ξ,η,ζ) 座標への変換式を用いる

$$\begin{aligned} &\int\int\int_{V_{\xi\eta\zeta}} \lambda \left\{ \frac{1}{6V}[N_x]^T \frac{1}{6V}[N_x] + \frac{1}{6V}[N_y]^T \frac{1}{6V}[N_y] + \frac{1}{6V}[N_z]^T \frac{1}{6V}[N_z] \right\} 6V d\xi d\eta d\zeta \\ = &\ \frac{6V}{36V^2}\lambda \int\int\int_{V_{\xi\eta\zeta}} \left\{ [N_x]^T[N_x] + [N_y]^T[N_y] + [N_z]^T[N_z] \right\} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \tag{1.110}$$

ここで $\left\{ [N_x]^T[N_x] + [N_y]^T[N_y] + [N_z]^T[N_z] \right\} = [K_m]$ とすると(ただし $[K_m]$ は実数値行列．

$$
\begin{aligned}
K_m &= [N_x]^T[N_x]+[N_y]^T[N_y]+[N_z]^T[N_z] \\
&= \begin{bmatrix} -a_{11}-a_{12}-a_{13} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_{11}-a_{12}-a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -a_{21}-a_{22}-a_{23} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_{21}-a_{22}-a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -a_{31}-a_{32}-a_{33} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_{31}-a_{32}-a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a_{11}+a_{12}+a_{13})^2 & \cdot & \cdot & -(a_{11}+a_{12}+a_{13})a_{13} \\ -a_{11}(a_{11}+a_{12}+a_{13}) & {a_{11}}^2 & \cdot & \cdot \\ -a_{12}(a_{11}+a_{12}+a_{13}) & a_{12}a_{11} & {a_{12}}^2 & \cdot \\ -a_{13}(a_{11}+a_{12}+a_{13}) & a_{13}a_{11} & a13a_{12} & {a_{13}}^2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} (a_{21}+a_{22}+a_{23})^2 & \cdot & \cdot & -(a_{21}+a_{22}+a_{23})a_{23} \\ -a_{21}(a_{21}+a_{22}+a_{23}) & {a_{21}}^2 & \cdot & \cdot \\ -a_{22}(a_{21}+a_{22}+a_{23}) & a_{22}a_{11} & {a_{22}}^2 & \cdot \\ -a_{23}(a_{21}+a_{22}+a_{23}) & a_{23}a_{11} & a23a_{22} & {a_{23}}^2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} (a_{31}+a_{32}+a_{33})^2 & \cdot & \cdot & -(a_{31}+a_{32}+a_{33})a_{33} \\ -a_{31}(a_{31}+a_{32}+a_{33}) & {a_{31}}^2 & \cdot & \cdot \\ -a_{32}(a_{31}+a_{32}+a_{33}) & a_{32}a_{11} & {a_{32}}^2 & \cdot \\ -a_{33}(a_{31}+a_{32}+a_{33}) & a_{33}a_{11} & a33a_{12} & {a_{33}}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.111}
$$

$$
\begin{aligned}
(K_1(=\text{式}\,1.110)) &= \frac{\lambda}{6V}[K_m]\int\int\int_{V_{\xi\eta\zeta}} d\xi d\eta d\zeta \\
&= \frac{\lambda}{6V}[K_m]\int_0^1\int_0^{1-\zeta}[\xi]_0^{1-\eta-\zeta}\,d\eta d\zeta \\
&= \frac{\lambda}{6V}[K_m]\int_0^1\int_0^{1-\zeta}(1-\eta-\zeta)d\eta d\zeta \\
&= \frac{\lambda}{6V}[K_m]\int_0^1\left[(1-\zeta)\;\eta\;-\frac{1}{2}\eta^{\;2}\right]_0^{1-\zeta} d\;\eta\;d\zeta \\
&= \frac{\lambda}{6V}[K_m]\int_0^1\frac{1}{2}(1-\zeta)^2 d\zeta \\
&= \frac{\lambda}{6V}[K_m]\int_0^1\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\zeta^3-\zeta^2+\zeta\right]_0^1 d\zeta \\
&= \frac{\lambda}{6V}[K_m]\frac{1}{6}=\frac{\lambda}{36V}[K_m] \qquad (1.112)
\end{aligned}
$$

と計算できる．ただし、K_m =(式 1.111)

同様にして，K_2, K_3 の導出も行う.

K2 の導出

1.27 式より，各節点の値を求めたいので，順番を入れ替えて，

$$
\begin{aligned}
\int_{S3} q[N]^T dS &= \int_{S3}\alpha(T-T_c)[N]^T dS \\
&= \int_{S3}[N]^T\alpha(T-T_c)dS \\
&= \int_{S3}\alpha[N]^T([N]\cdot T_{ele})dS-\int_{S3}\alpha[N]^T T_c dS \\
&= \int_{S3}\alpha[N]^T[N]dS\cdot T_{ele}-\int_{S3}\alpha[N]^T T_c dS \qquad (1.113)
\end{aligned}
$$

***dS* の導出**

(x, y, z) 空間内のベクトル u, v の微小変化，du, dv は，単位ベクトル $e(i, j, k)$ を用いて，

$$
du = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \qquad (1.114)
$$

$$dv = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \tag{1.115}$$

と表せる.

また，空間中の三角形微小要素 dS は $dS = \frac{1}{2}|du \times dv|$ と表せる.

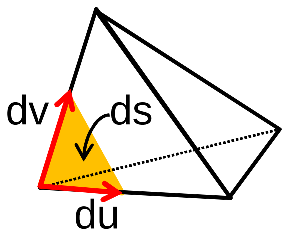

図 1.5 三角形微小要素 dS

テーラーの定理より，

$$x(\xi + d\xi, \eta, \zeta) = x(\xi, \eta, \zeta) + \frac{\partial}{\partial \xi} x(\xi, \eta, \zeta) d\xi \tag{1.116}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} x(\xi, \eta, \zeta) d\xi &= x(\xi + d\xi, \eta, \zeta) - x(\xi, \eta, \zeta) \\ &= (x_2 - x_1)(\xi + d\xi) + (x_3 - x_1)\eta + (x_4 - x_1)\zeta \\ &\quad -\{(x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + (x_4 - x_1)\zeta\} \\ &= (x_2 - x_1) d\xi \end{aligned} \tag{1.117}$$

これらは，$[J]$ の各成分に $d\xi, d\eta, d\zeta$ を乗じたものである．ゆえに，次式になる.

$$\begin{aligned} [J]\ [d\xi \quad d\eta \quad d\zeta] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} [d\xi \quad d\eta \quad d\zeta] \\ &= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} [d\xi \quad d\eta \quad d\zeta] \end{aligned} \tag{1.118}$$

式1.88を再掲する.

$$
\begin{aligned}
x &= (1-\xi-\eta-\zeta)x_1+\xi x_2+\eta x_3+\zeta x_4 \\
&= (x_2-x_1)\xi+(x_3-x_1)\eta+(x_4-x_1)\zeta+x_1 \\
y &= (y_2-y_1)\xi+(y_3-y_1)\eta+(y_4-y_1)\zeta+y_1 \\
z &= (z_2-z_1)\xi+(z_3-z_1)\eta+(z_4-z_1)\zeta+z_1
\end{aligned} \tag{1.119}
$$

だから，u,vの微小変化du,dvを以下の式で表すとする．$\eta=0$の$\xi-\zeta$平面で考えると，

$$
du = (\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi)i+(\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi)j+(\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi)k \tag{1.120}
$$

$$
dv = (\frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta)i+(\frac{\partial y}{\partial \zeta}d\zeta)j+(\frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta)k \tag{1.121}
$$

//↑に関して，$\eta\neq 0$の時の下の係数の計算はどうにか循環して計算できるように実装したい.

以上より，$du\times dv$は単位ベクトルeを用いて，次式のように書ける.

$$
e = \left[\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array}\right]
$$

を用いて

$$
\begin{aligned}
du \times dv &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta & \frac{\partial y}{\partial \zeta}d\zeta & \frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi d\zeta \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} d\xi d\zeta \\
&= \begin{bmatrix} (y_2 - y_1)(z_4 - z_1)e_1 - (z_2 - z_1)(y_4 - y_1)e_1 \\ +(x_4 - x_1)(z_2 - z_1)e_2 - (x_2 - x_1)(z_4 - z_1)e_2 \\ +(x_2 - x_1)(y_4 - y_1)e_3 - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)e_3 \end{bmatrix} d\xi d\zeta \\
&= \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} d\xi d\zeta \qquad (1.122)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
M_1 &= (y_2 - y_1)(z_4 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_4 - y_1) \\
M_2 &= (x_4 - x_1)(z_2 - z_1) - (x_2 - x_1)(z_4 - z_1) \qquad (1.123) \\
M_3 &= (x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)
\end{aligned}
$$

とする．式1.122,1.123, ピタゴラスの定理より，微小面積は次の様に計算できる．

$$
\begin{aligned}
dS &= |du \times dv| \\
&= \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} d\xi d\zeta \qquad (1.124)
\end{aligned}
$$

ただし，$0 \leqq \zeta \leqq 1 - \xi, 0 \leqq \xi \leqq 1$とする．(参考:また、$dS, d\xi d\zeta$は微小面積要素なので、この段階では積分範囲の形状を考慮した$\frac{1}{2}$は付さない。)

K_2, K_3 を求める

ところで，Nの定義は，1 ×Nの行マトリクスであった．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
[N]^T \cdot [N] &= \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1N_2 & N_1N_3 & N_1N_4 \\ N_2N_1 & N_2^2 & N_2N_3 & N_2N_4 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3^2 & N_3N_4 \\ N_4N_1 & N_4N_2 & N_4N_3 & N_4^2 \end{bmatrix} \qquad (1.125)
\end{aligned}
$$

となり，対称行列となる．N_1, N_2, N_3, N_4 はそれぞれ行列ではなく，行列の成分なので，対角成分と上半分（または下半分）を求めればよい．

式1.31の右辺第二，三項を計算するにあたり，式1.125の行列の各要素について，積分計算を行う．これを要素ごとにまとめ，四面体要素全体の計算としてまとめることにする．

$$
([K]\text{ の第二，三項}) = \int_{S3} \alpha[N]^T[N]dS + \int_{S4} h[N]^T[N]dS \qquad (1.126)
$$

そこで，本計算では，引き続き (x, y, z) 空間内の四面体を (ξ, η, ζ) 空間内に座標変換した四面体内で考える．以下，$\eta = 0$ とした $\xi - \zeta$ 平面の面積分を考える．

$$
\int_0^1 [N]^T[N]dS = \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} [N]^T[N]d\zeta \qquad (1.127)
$$

ここで，$[N][N]^T$ の行列 (式1.125) に含まれる要素ごとに積分を行う.

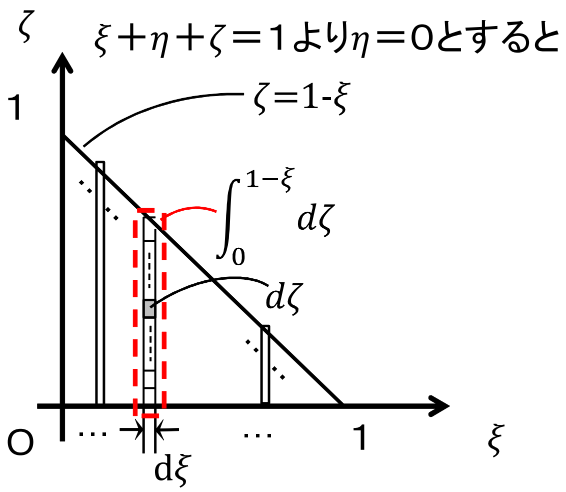

図 1.6 $\xi-\zeta$ 平面での面積分 $\int_0^1 d\xi\int_0^{1-\xi} d\zeta$

$i)$ N_1^2 のとき

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^{1-\xi} N_1^2 d\zeta d\xi &= \int_0^1\int_0^{1-\xi}(1-\xi-\zeta)^2 d\zeta d\xi \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{3}\left[(1-\xi-\zeta)^3\right]_0^{1-\xi} d\xi \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3}(1-\xi)^3 d\xi \\
&= -\frac{1}{12}\left[(1-\xi)^4\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}
\tag{1.128}
$$

$ii)$ N_1N_2 のとき

.

.

.

同様にして，$N_2^2, N_3^2, \ldots N_2N_4, N_3N_4$ を求める．また，N_1N_2， N_2N_1 は積の順番を入れ替え可能なため，同値となる．

求めた結果，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 [N]^T[N]dS &= \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} [N]^T[N]d\zeta \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \qquad (1.129) \\
&= \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (1.130)
\end{aligned}
$$

ゆえに，式1.124，1.126より，

$$
\begin{aligned}
(\text{$[K]$の第$2,3$項からα, hを除いたもの}) &= \int_{Sx} [N]^T[N]dS \\
&= \int_{Sx} [N]^T[N]\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}d\xi d\zeta \\
&= \sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}}{2}\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

次に，熱容量マトリクスについての式の導出を行う．Kと同様にして最終的に(x, y, z)空間に変換すると，次式のようになる(式1.109を用いてdVを座

標変換する).

$$
\begin{aligned}
(\text{式 }1.32\text{ の右辺}) &= \int_v \rho c[N]^T[N]dv && (1.131)\\
&= \rho c\int_0^1\int_0^{1-\xi}\int_0^{1-\xi-\eta}[N]^T[N]det|J|d\xi d\eta d\zeta \\
&= \rho c\cdot 6V\begin{bmatrix} \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120}\\ \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120}\\ \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120}\\ \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{60}\end{bmatrix}\\
&= \frac{\rho cV}{20}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix} && (1.132)
\end{aligned}
$$

また，熱流束ベクトルについても，Kと同様にして最終的に (x, y, z) 空間に変換すると，次式のようになる.

$$
\begin{aligned}
(\text{式 }1.33\text{ の右辺より}) &= \int_s [N]^T ds && (1.133)\\
&= \sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\\ 0\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix} && (1.134)
\end{aligned}
$$

$$[K]\{T\}+[C]\{\frac{\partial T}{\partial t}\}=\{F\} \tag{1.135}$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
[K] &= \int_v \lambda\{\frac{\partial [N]^T}{\partial x}\frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y}\frac{\partial [N]}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z}\frac{\partial [N]}{\partial z}\}dv \\
&\qquad + \int_{S3}\alpha [N]^T[N]dS + \int_{S4} h[N]^T[N]dS \qquad (1.136)\\
&= \frac{\lambda}{6V}[K_m] \qquad (\because \text{式} 1.110 \text{より})\\
&\quad + \alpha\frac{\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}}{2}\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix} + h\frac{\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}}{2}\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\\
&\quad (\text{ただし},\eta = 0 \text{の時})\\
[C] &= \int_v \rho c[N]^T[N]dv \qquad (1.137)\\
&= \frac{\rho c V}{20}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix} \qquad (1.138)\\
\{F\} &= \int_v [N]^T\frac{\partial Q}{\partial t}dv - \int_{S2} q_0[N]^TdS + \int_{S3}\alpha T_c[N]^TdS\\
&\qquad + \int_{S4} hT_{OUT}[N]^TdS \qquad (1.139)\\
&= \int_v [N]^T\frac{\partial Q}{\partial t}dv - q_0\cdot\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\\ 0\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix} \qquad (1.140)\\
&\quad + \alpha T_c\cdot\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\\ 0\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix} + hT_{OUT}\cdot\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\\ 0\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}\\
&\quad (\text{ただし},\eta = 0 \text{の時}) \qquad (1.141)
\end{aligned}
$$

以上より、各四面体要素における要素剛性行列を求めることができた。

全体剛性行列（ベクトル）は、要素剛性行列の和で求めることができる。

1.3.5　全体剛性行列の作成

ある要素に属する節点の中には、他の要素と共有されるものがある。各々の要素について求めた要素剛性行列を、全節点の並び順に合わせて要素剛性行列を加算し、合成する必要がある。この操作により、全体剛性行列を作ることができる。

ガス加熱

ガス加熱では燃焼ガスがフライパンなどの調理器具の底に吹きつけられ、加熱する方式?である。調理器具表面での対流伝熱が生じる。

1.3.6　IH加熱

IH範囲の当たり判定

IHによる加熱範囲は、IHが同心コイル状なので、円環状になると考えられる。また円環状に加熱されることは、熱画像カメラによる測定でも確認できた。この加熱を、調理器具を表現した3次元の四面体要素で分割した調理器具メッシュを使って再現を行う。調理器具には、厚みが一様の鉄板を用いる。鉄板をドロネーの四面体要素で分割する。分割したメッシュの図は次のようになる。

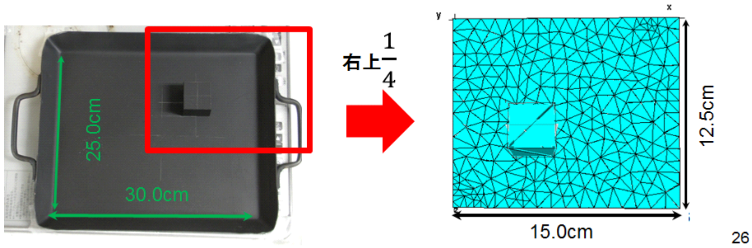

図1.7 鉄板を四面体分割したメッシュの図

IHから伝わる熱流束を計算する。IH加熱では、鉄板内部で誘導加熱され、加熱部位から隣り合う要素の節点へと熱伝導すると考えられる。

ところで、IH加熱では、誘導コイルから出た磁束が調理器具内部に浸透し、磁束の周りに生じる渦電流がジュール加熱されて発熱する。磁束が浸透する深さ（浸透深さ）は、計算により算出が可能である[5]。

IH加熱の周波数が$20kHz$〜$60kHz$との報告がある。(要出典:インターネットより。メーカーに確認する) また、筆者が、IHクッキングヒーターの上空で一巻きコイルを置き、周波数を計測した所、周波数のモードは短時間で変化するが大体上記の範囲で推移した。(wikiまたは研究ノートに周波数の範囲を記載してある。）調理器具に鉄板を用いた場合には、グラフより、調理器具の表面から0.1mm未満浸透する。そのため、IHによる誘導加熱は、鉄板の底面で生じるものとして計算を行う。したがって、IHから鉄板への単位時間当たりの熱流束量を、鉄板の円環領域の面積で除したものを、円環領域のメッシュに対して付加することにより、IH加熱を再現することにする。

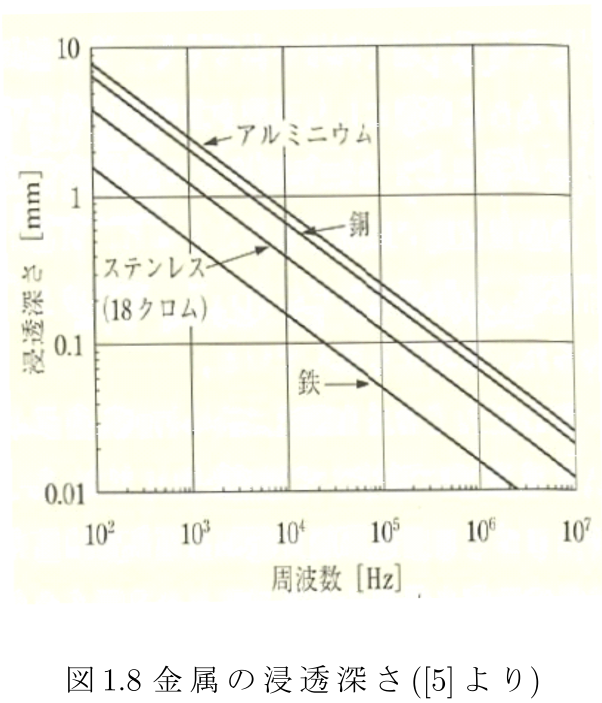

図1.8 金属の浸透深さ([5]より)

図1.9は、IHに内蔵されたコイルに寄る誘導加熱の原理の模式図である。コイルからの磁束が鍋底から、浸透深さまで浸透し、鍋内に磁束の向きに対して右ねじの法則でウゼ電流が発生する。鍋の材質に固有の電気抵抗に

よりジュール熱が生じ、加熱される。

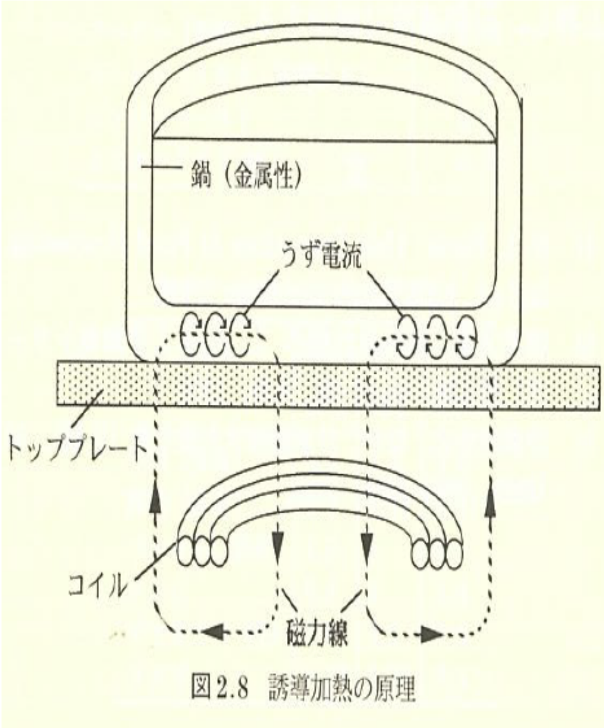

図 1.9 IH コイルによる誘導加熱の模式図 ([5] より)

IH 再現のための熱流束の計算手法

IH 加熱を再現するためには、熱流束ベクトルの第二項の計算については工夫が必要となる。

$$F_2 = \int_{S2} q_0 [N]^T dS \qquad (1.142)$$

$$= \int_0^a \int_0^b N dx dz \qquad (1.143)$$

$x - z$ 平面で、IH の加熱範囲にある鉄板のメッシュについて上記 F_2 について当たり判定を行いメッシュに対して加熱を行う。図??では、2 つの円弧に挟まれた領域に四面体メッシュの 1 三角形面が表示されている。

1.3.7 IH加熱円環領域での積分式について

$$\int_{S_2} q[N]\, TdS \tag{1.144}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \int_{\triangle 234\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_2 ds \\ q_1 \int_{\triangle 234\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_3 ds \\ q_1 \int_{\triangle 234\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_4 ds \end{bmatrix} \tag{1.145}$$

$$+ \begin{bmatrix} q_2 \int_{\triangle 134\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_1 ds \\ 0 \\ q_2 \int_{\triangle 134\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_3 ds \\ q_2 \int_{\triangle 134\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_4 ds \end{bmatrix} \tag{1.146}$$

$$+ \begin{bmatrix} q_3 \int_{\triangle 124\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_1 ds \\ q_3 \int_{\triangle 124\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_2 ds \\ 0 \\ q_3 \int_{\triangle 124\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_4 ds \end{bmatrix} \tag{1.147}$$

$$+ \begin{bmatrix} q_2 \int_{\triangle 123\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_1 ds \\ q_2 \int_{\triangle 123\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_2 ds \\ q_2 \int_{\triangle 123\text{のうち、形状関数の存在する範囲内}} N_3 ds \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.148}$$

ただし、熱流束q_1〜q_4が存在する四面体面についてのみ定義する。また、面積分は、形状関数が存在する範囲、すなわち、IH加熱領域内にのみ分布すると考え、領域内の面積と分布している形状関数からなる擬似体積を求める。

1.3.8 方程式の解法

方程式の解法は様々知られている。その内のいくつかを紹介し、数値計算法が適用できるように式を変形する。

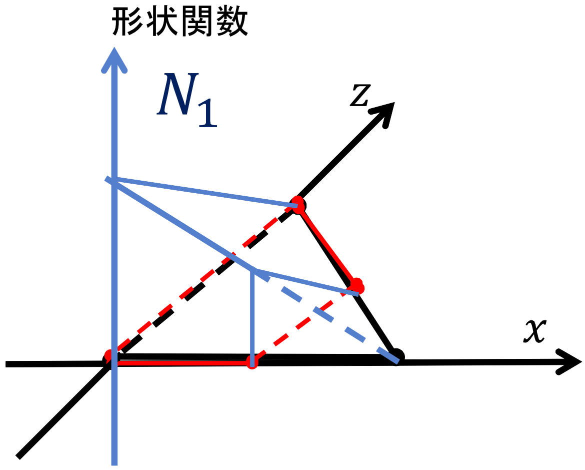

図1.10 IH加熱領域にかかったface面における形状関数の分布

逆行列を用いた解法

時間軸での差分式を用いて、$t+\Delta t$ステップでの温度ベクトルを求めるためには、単に$T(t+\Delta t)$の係数の全体剛性行列の逆行列を左から両辺にかければ良い。行列の成分は上三角と下三角とで(i,j)と(j,i)成分の値は同じになるはずである。しかし、縦×横がn次元として、nが300程度であれば、逆行列の計算には1秒程度で済むが、掃出し法の場合、ガウスの消去法?なので?、nが少し大きくなると、その3乗に比例して大きな計算コストがかかるようになる。プリプロセスとはいえ、現実的にデバッグするのが大変になってしまう。そこで、ガウスザイデル法を使って反復計算を行い、制度は劣るが繰り返し計算の回数で精度をあげていく手法をとる。ガウスザイデル法の詳しい計算の仕方については、次に述べる。

ガウスザイデル法

本研究では、数値計算の速度を重視し、計算精度を繰り返し計算回数での調節が期待できるガウスザイデル法を用いて計算を行う。また、並列計算も可能であると考えられ、GPUなどを使った超並列計算の実現を期待している。

$$
\begin{aligned}
Ax(n) + b &= 0 && (1.149)\\
(D - F)x(n) &= -b && (1.150)\\
x(n) &= D^{-1}Fx(n) - D^{-1}b && (1.151)
\end{aligned}
$$

ただし、Dは、Aの対角成分のような行列。Fは、AからDを引いたものとなる。式??を当てはめると、次式になる。

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1}{2}[K] + \frac{1}{\Delta t}[C]\right) && (1.152)\\
x[n] &= \{T(t + \Delta t)\} && (1.153)\\
-b &= \left(-\frac{1}{2}[K] + \frac{1}{\Delta t}[C]\right)\{T(t)\} + \{F\} && (1.154)
\end{aligned}
$$

以上より、

$$
\begin{aligned}
T(t+\Delta t) = D^{-1}(-1)(&\left(\frac{1}{2}[K] + \frac{1}{\Delta t}[C]\right) \text{の非対角成分})T(t)\\
&-D^{-1}(\left(-\frac{1}{2}[K] + \frac{1}{\Delta t}[C]\right)\{T(t)\} + \{F\}) \qquad (1.155)
\end{aligned}
$$

上記で、Dは、Aの対角成分から作成した配列とする。また、FはAの非対角成分、すなわち、互いに異なる節点で作る四面体の辺と捉え、これを要素とする構造体とみなす。$-b$に相当する部分は、繰り返し計算前の温度ベクトル$T(t)$を用いて作成する。

まず、Aを求め、対角成分だけになるような行列を探し、F, Dを定義して、計算を進める。上式より、$x[n]$は節点の温度を表す$n \times 1$のベクトル$T(t + \Delta t)$になる。ヤコビ法では、xを一度に更新するが、ガウス・ザイデル法では1行ずつ更新する。そのため、毎計算ステップで1つの節点が順々に更新されていく。右辺第一項の$T(t)$は、随時更新されたi行の温度については更新されたものを用いる。

計算アルゴリズム式の模式図を次に示す。

1.3.9 IHからの距離に応じた磁束の変化

コイルからの距離に応じて、磁束が変化し、加えられる熱が変化する。コイルから任意点への磁束と、渦電流、渦電流により生じるジュール熱の式

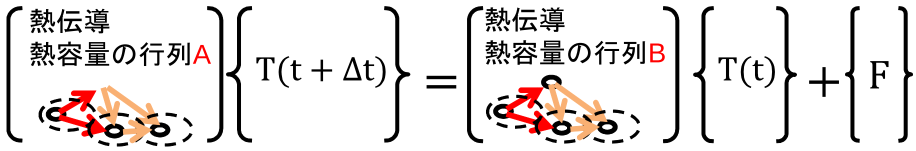

図 1.11 ガウスザイデルの計算式

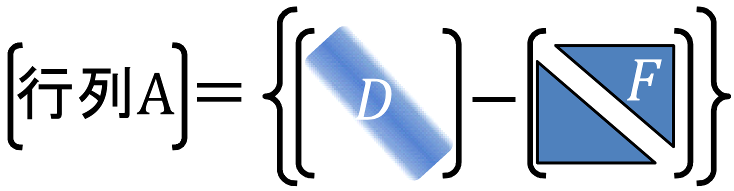

図 1.12 ガウスザイデルの計算式2

は、どうなるか。調べて、整理する。

1.4　伝熱計算の実装

1.4.1　熱伝達

$voidHeatTrans(PHSolid{*}phs0, PHSolid{*}phs1, FWFemMesh{*}fmesh0, FWFemMesh{*}$ $fmesh1)...$ 内で、熱流束ベクトルの要素にdqdtを加算・減算する

$doubledqdt = condVtxs[0].pmesh- > vertices[condVtxs[0][i].vid].heatTransRatio *$ $(condVtxs[0].pmesh- > vertices[condVtxs[0][i].vid].temp - condVtxs[1].pmesh- > vertices[condVt$

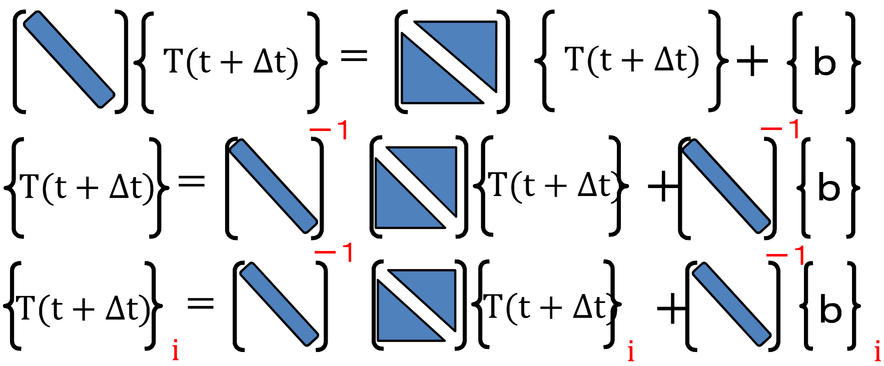

図 1.13 ガウスザイデルの計算式3

$condVtxs[0][i].companions[j].area$

より、dqdtの次元は、$(W/m^2 \cdot K) \cdot K \cdot m^2 = W$

四面体単位で考える場合、支配方程式中のQは単位四面体当たりに単位時間に供給される熱量と捉える。

また、$\{F\}$の次元は、Wになる。以上より、熱伝達率の値がWの数値を使っている場合には、常識の加減算は成立するはずである。

1.4.2 数値の根拠

熱伝達率： 25$[W/(m \cdot$°C$)]$ [[6]pp.4]

1.4.3 ガウスザイデル法の計算式の改善予定

繰り返し計算回数は、解が収束するかどうかを見るときの、上限計算回数?の設定としてである。現在のコードには、解の収束を見るコードが入っていないため、繰り返し計算回数を１００程度にするという内部ルールを設けないと危険である。

また、計算実行時の初期に求める右辺の計算結果をクリアするかどうかでも、次の繰り返しでの計算結果に影響が出る。ここも検討していない。

1.4.4 Scilabを使ったデバッグや生成した行列サンプル

熱伝導マトリクス$[K]$熱容量マトリクス$[C]$熱流束ベクトルF

1.5 伝熱シミュレーションモデルの同定

1.5.1 同定の概要

計測点同定実験

第2章

水分シミュレーション

2.1 水分の蒸発

2.1.1 乾燥の3段階

水の沸騰温度以下、一定条件下での乾燥行う場合の乾燥曲線は下図。図内、右側から左下へ推移する。恒率乾燥期、減率乾燥機（第一弾、二段）の順があるが、食品のすべてが3段階を経るわけではない。同じ素材でも、比表面積の小さい形状、大きな塊、ブロック状の場合、恒率乾燥機は極めて短く、認められないことが多い。薄片状にしたり、粉砕した場合には比表面積が増大して恒率乾燥期が長くなり、低水分含量まで続くことになる。食品種類や状態、含水量あるいは乾燥条件によってこれら乾燥期のどれか1つまたは2つを欠く。米粉の場合、初期含水量が12%程度であり、恒率乾燥期は見られない。

高含水量領域では、乾燥速度が含水量に関係なく一定になり、恒率乾燥期と呼ばれる。減率乾燥期では、含水量現象に伴い乾燥速度が減少する。この内、含水量と乾燥速度が直線的である減率第一弾乾燥期と、含水量の減少に伴い急速に減少する減率第二弾乾燥期がある。

恒率乾燥期から減率乾燥期へ移行する限界の含水量である限界含水率は形状や乾燥条件によって変動する。比表面積が大きいほど、乾燥条件が緩和であるほど低い値を持つと考えられる(文献[7]より)。

2.1.2 乾燥が続く条件

乾燥は、食品の水蒸気圧が周囲の水蒸気圧と平衡状態になるまで継続する。外囲環境下での平衡含水量までしか脱水されない。できるだけ水分を

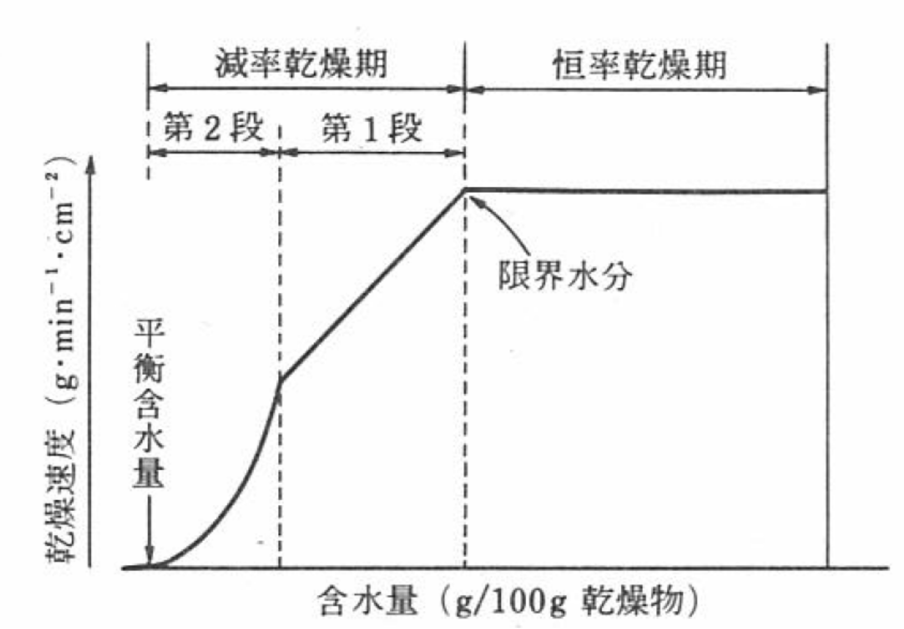

図2.1 乾燥の3段階: 横軸;含水量 (g/100g 乾燥物)、縦軸:乾燥速度$[g{\cdot}min^{-1}{\cdot}cm^{-2}]$

取り除くためには、空気の乾燥、減圧、温度上昇が効く。

2.1.3 食品内部での気化

乾燥温度が食品中に含有される水の沸点温度より高いと、十分に熱が内部に達した段階から内部の気化が起こり、食品の組織の状態や、形状によっては膨化、発泡、亀裂などの変化が生じることがある。

2.1.4 恒率乾燥期

蒸発は、その温度における飽和水蒸気圧H_sと環境雰囲気中の水蒸気圧H_cとの差$(H_s - H_c)$に支配され、単位表面積当たりの乾燥速度R_cは次のように表される。(水蒸気圧が温度の関数になっているはずなので、さらに分解すると、温度の関数に式変形できるはずだ。)

$$\begin{aligned} R_c &= -\frac{W_0}{A} \cdot \frac{dW}{d\theta} \\ &= K(H_s - H_c) \end{aligned} \tag{2.1}$$

W_0 : 材料の無水物質量

A : 見かけの乾燥表面積

$\frac{dW}{d\theta}$: 単位時間における単位材料無水物質量当たりの水の質量の変化

K : 境膜物質移動係数。雰囲気の流速と共に増大する。

前乾燥速度 $R_c A$ を大きくするには□表面積を大きくする、□温度を上昇させて H_s を大きくする、□雰囲気中の水蒸気を減らす、□ K を大きくするために風を送る、ことが有効である。

また、恒率乾燥期において、水の蒸発熱によって品温は湿球温度以上に上昇しない。

また、蒸発速度が大きい型自由水が多いというわけではない。(文献[7]のpp.202の最初の段落より)

2.1.5 減率第一段乾燥期

水分蒸発による水分減少に伴い、水分で覆われていた箇所が露出し始めて、蒸発表面積が減少するか、毛管現象などによる内部からの水の補充が間に合わなくなって、水の自由蒸発表面が全含水量に比例して徐々に減少してゆくようになる状態が減率第一段乾燥期である。この時の見かけの単位表面積当たりの乾燥速度 R_{f1} は次のように表される。

$$\begin{aligned} R_{f1} &= -\frac{W_0}{A} \cdot \frac{dW}{d\theta} \\ &= K'(W - W_e) \qquad (2.2) \end{aligned}$$

W : 時刻 θ における平均含水量

W_e : 平衡含水量

K' : 比例定数

この関係は、限界自由含水量 W_{crit} においても成立する。乾燥速度を R_{crit} と

すると、

$$
\begin{aligned}
R_{crit} &= K'(W - W_e) &(2.3)\\
\text{答えの記号}K' &= \frac{R_{crit}}{W_{crit} - W_e} &(2.4)\\
R_{f1} &= \frac{W - W_e}{W_{crit} - W_e} R_{crit} &(2.5)
\end{aligned}
$$

乾燥時間は上式を積分する。

2.1.6 減率第二段乾燥期

減率第一段乾燥期で、水の自由表面がだんだん減少してついに消失すると、蒸発できる水は、濃度購買に基づいて内部から表へ拡散してきた水だけ位になる。つまり、水の内部拡散が蒸発の律速段階になる。この状況は、ふぃっくの拡散方程式が適用できる([7]のpp.203の第二段落参照)。拡散方程式に初期条件を適用すれば、乾燥速度や時間などが求められるはずである。しかし、材料形状、平均含水量、水分分布状態その他を考慮する必要がある。

拡散係数は、材料の種類や組織、構造によって異なる。含水量の関数である。実際上は、亜含水量範囲内でほぼ一定とみなせるので、その範囲内での平均値を用いることが多い。食品の拡散係数についての測定値は比較的少ないが、調べられているものを下記に記す。

図　食品中の水の拡散係数

2.1.7 毛管作用による水の吸引

多孔性食品において、表面で蒸発した水を内部から補給する際に毛管作用による吸引力は重要である。Laplaceによると、毛管作用による水の吸引力はj次式で定められる。([7]のpp.205の第二段落参照(8.16節第一段))

$$\delta p = \frac{2\gamma}{r} cos\theta = \rho g h \tag{2.6}$$

δp : 吸引力

h : 液の上昇する高さ

γ : 液体の表面張力

g : 重力加速度

r : 毛管の半径

θ : 接触角

ρ : 液体の密度

単位の次元

$$\delta p = \rho g h = [kg/m^3][m/s^2][m] = [kg/(m \cdot s^2)] \tag{2.7}$$

$$F = ma = [N] = [(kg \cdot m)/s^2] \tag{2.8}$$

2.1.8　水分・油分の拡散方程式の定式化

毛管現象と拡散係数を合わせた、食品水分・油分の拡散方程式の定式化が必要

2.1.9　従来の水分蒸発シミュレーションのアルゴリズム

熱シミュレーションStepの進捗に伴い、メッシュ節点温度が沸点を超えている節点では、沸点を超えた分の水分が蒸発するはずである。
仮定 :「水分蒸発によって、節点から潜熱が奪われ、湿球温度を保つはず」
に基づき、メッシュ節点温度から潜熱分を差し引き、蒸発水分をメッシュ節点から減じる処理を実装した。

また、仮定 :「水分も同時に流出しているはず」
として、蒸発量の定数倍をメッシュ節点質量から減じる式にした。

2.1.10　沸点温度未満の場合

食品と水の科学[7]のpp.201によれば，蒸発は，その温度における飽和水蒸気圧H_sと環境雰囲気中の水蒸気圧H_cとの差$H_s - H_c$に支配され，単位表面積あたりの乾燥速度R_cは次のように表せる．

$$R_c = -\frac{W_0}{A} \cdot \frac{dW}{d\theta} = K(H_s - H_c) \tag{2.9}$$

ただし，W_0 : 見かけの無水物質量，A : 見かけの乾燥表面積，$\frac{dW}{d\theta}$: 単位時間における単位材料無水物当りの水の質量の変化，K : 境膜物質移動係数．雰囲気の流速と共に増大する．

メッシュの外殻を構成する要素の面積を用いて、蒸発する水分量を計算することができるはずである。

これを有限要素法の計算式に組み込むためにはどうすればよいだろうか?

第3章

うま味

アミノ酸によるもの (3.1)

·グルタミン酸 (3.2)

(3.3)

核酸によるもの (3.4)

·イノシン酸（出展：ネット？） (3.5)

·イノシン酸が多いものは、プリン体も多かったような。細胞の味？ (3.6)

(3.7)

コク (3.8)

·雑味のこと、単純ではない味（出展：こくと何とかの *hogehoge*） (3.9)

(3.10)

3.1 旨味成分の多い食品

主な旨味成分グルタミン酸：昆布、チーズ、緑茶、トマトなどにイノシン酸：魚や肉類位にグアニル酸：きのこ類に

参考文献

[1] 矢川元基. 流れと熱伝導の有限要素法入門, 有限要素法の基礎と応用シリーズ8, 初版, pp. 19–23 103–109. 培風館, 1983.

[2] 小林清志, 飯田嘉宏. 新版　移動論, 初版第11刷, pp. 3 61–63 68–69. 朝倉書店, 1997.

[3] 戸川隼人. 有限要素法概論, 初版第4刷. 培風館, 1981.

[4] 三宅敏恒. 入門微分積分, 初版第24刷. 培風館, 1992.

[5] 日本食品工学会. 食品工学ハンドブック, 初版第一刷. 朝倉書店, 2006.

[6] E.Purlis and V.O.Salvadori. Meat cooking simulation by finite elements.

[7] 野口駿. 食品と水の科学, 初版第 1 刷. 幸書房, 1992.