直線上に質量 m_A の質点 A と質量 m_B の質点 B がある．2 質点はバネとダンパを介して連結されている．このような系をいくつかの異なる積分則で時間的に離散化したとき，運動の時系列が安定となるための条件を導出する．

質点の位置，速度をそれぞれ $x_n^A, v_n^A, x_n^B, v_n^B$ とする．

1 解析的な積分解の場合

$$x_{n+1}^A = x_n^A + v_n^A h + \frac{1}{2}\frac{f_n}{m^A}h^2 \tag{1}$$
$$v_{n+1}^A = v_n^A + \frac{f_n}{m^A}h \tag{2}$$

$$x_{n+1}^B = x_n^B + v_n^B h - \frac{1}{2}\frac{f_n}{m^B}h^2 \tag{3}$$
$$v_{n+1}^B = v_n^B - \frac{f_n}{m^B}h \tag{4}$$

$e_n = x_n^A - x_n^B$ とおくと、

$$e_{n+1} = e_n + \dot{e}_n h + \frac{1}{2}(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B})f_n h^2 \tag{5}$$
$$\dot{e}_{n+1} = \dot{e}_n + (\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B})f_n h \tag{6}$$

$f_n = -ke_n - b\dot{e}_n$ と $\tilde{m} = (1/m_A + 1/m_B)^{-1}$ を代入して整理すると，

$$\begin{pmatrix}\dot{e}\\ e\end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix}1 - \frac{h}{\tilde{m}}b & -\frac{h}{\tilde{m}}k\\ h - \frac{h^2}{2\tilde{m}}b & 1 - \frac{h^2}{2\tilde{m}}k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{e}\\ e\end{pmatrix}_n \tag{7}$$

上式右辺の行列を A とおくと．このシステムが安定となるための条件は，A の固有値の絶対値が 1 よりも小さいことである．

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + (\frac{bh}{\tilde{m}} + \frac{h^2k}{2\tilde{m}} - 2)\lambda + (1 - \frac{bh}{\tilde{m}} + \frac{h^2k}{2\tilde{m}}) \tag{8}$$
$$= \lambda^2 + (\tilde{b} + \tilde{k} - 2)\lambda + (1 - \tilde{b} + \tilde{k}) \tag{9}$$
$$\lambda = \frac{1}{2}(2 - \tilde{b} - \tilde{k} \pm \sqrt{(\tilde{b} + \tilde{k})^2 - 8\tilde{k}}) \tag{10}$$

ここで $\tilde{b} = \frac{bh}{\tilde{m}}, \tilde{k} = \frac{h^2k}{2\tilde{m}}$ で，いずれも無次元量である．

(i)$(\tilde{b} + \tilde{k})^2 - 8\tilde{k} < 0$ の場合，固有値は共役複素数となるので，

$$\lambda = x \pm yi$$
$$||\lambda||^2 = x^2 + y^2 = 1 + \tilde{k} - \tilde{b} < 1$$
$$\therefore \tilde{k} < \tilde{b}$$

(ii)$(\tilde{b} + \tilde{k})^2 - 8\tilde{k} > 0$ の場合，固有値は異なる実数.

(ii-a)$2 - (\tilde{b} + \tilde{k}) < 0$:

$$|\lambda|_{\max} = |\frac{2 - \tilde{b} - \tilde{k} - \sqrt{(\tilde{b} + \tilde{k})^2 - 8\tilde{k}}}{2}|$$

$$|\lambda|_{\max} < 1 \Leftrightarrow b < 2$$

(ii-b)$2-(\tilde{b}+\tilde{k})>0$:

$$|\lambda|_{\max} = |\frac{2-\tilde{b}-\tilde{k}+\sqrt{(\tilde{b}+\tilde{k})^2-8\tilde{k}}}{2}|$$

この場合必ず $|\lambda|_{\max} < 1$

以上より，式 (**??**) が安定となるためには，$(\tilde{b},\tilde{k})$ が $\tilde{k}<\tilde{b},\tilde{b}<2,\tilde{k}>0$ で囲まれた領域の内部にあれば良い．

また，$(\tilde{b},\tilde{k})=(3/2,1/2)$ のとき固有値は二つとも 0 となり，任意の初期値に対して有限ステップで原点に達する．実際,

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/h \\ h/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -h/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/h \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$A^2 = 0 \tag{12}$$

2　オイラー積分の場合

積分則を

$$x_{n+1} = x_n + v_n h \tag{13}$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{f_n}{m} h \tag{14}$$

とした場合，前節と同様にして,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -\frac{kh}{\tilde{m}} & 1-\frac{bh}{\tilde{m}} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\lambda = 1 - \frac{\tilde{b}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\tilde{b}^2-2\tilde{k}} \tag{16}$$

このとき，システムの安定条件は，$(\tilde{b},\tilde{k})$ が $\tilde{k}<\tilde{b}/2,\tilde{k}>\tilde{b}-2,\tilde{k}>0$ で囲まれた領域の内部にあることである．また，$(\tilde{b},\tilde{k})=(2,1/2)$ のときに固有値が 0 となり，有限ステップ整定となる．